SISTEMAS CON PARÁMETROS (ROUCHÉ) FICHA 4

1) Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m y resuélvelo en el caso en que sea compatible determinado

$$\left.\begin{array}{l} x+y+mz=1 \\ x-y+2z=0 \\ 2x-y-z=m \end{array}\right\}$$

2) Determina el valor de a para que el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+a^2y+a=0 \\ ax+y+a^2=0 \\ a^2x-ay+1=0 \end{array}\right\}$ sea compatible y, en tal caso, resuélvelo.

3) Discute el siguiente sistema homogéneo según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} mx \qquad\qquad +2z=0 \\ (m-2)y+z=0 \\ (m-1)x+y-z=0 \end{array}\right\}$$

4) Discute y resuelve, en función del parámetro m, el sistema $\left.\begin{array}{l} mx+y+z=2 \\ x+my \qquad =1 \\ x+my+mz=1 \end{array}\right\}$

SOLUCIONES

1) $\left.\begin{array}{l} x+y+mz=1 \\ x-y+2z=0 \\ 2x-y-z=m \end{array}\right\} \to A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & m \end{pmatrix}$, empezamos calculando el determinante de A: $|A|=m+8=0 \Rightarrow m=-8$

- Si $m \neq -8 \to |A| \neq 0 \to rang(A)=3=rang(A')=\text{n} \to$ S. COM. DETERMINADO

Lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & -1 & 2 \\ m & -1 & -1 \end{vmatrix}}{m+8}=\frac{m^2+2m+3}{m+8}; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & m & -1 \end{vmatrix}}{m+8}=\frac{m^2-2m+5}{m+8}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix}}{m+8}=\frac{-2m+1}{m+8}$$

- Si $m=-8 \to$ sabemos que $rang(A)=2 \to \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2 \neq 0\right)$ veamos el rango de A’, para ello tomamos el menor anterior con la columna de los término independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang(A')=3 \neq rang(A)=2 \to \text{S. INCOMPATIBLE}$$

2) $\left.\begin{array}{l} x+a^2y+a=0 \\ ax+y+a^2=0 \\ a^2x-ay+1=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x+a^2y=-a \\ ax+y=-a^2 \\ a^2x-ay=-1 \end{array}\right\} \to A'=\begin{pmatrix} 1 & a^2 & -a \\ a & 1 & -a^2 \\ a^2 & -a & -1 \end{pmatrix} \to |A'|=-a^6+2a^3-1$

$$-a^6+2a^3-1=0 \Rightarrow a^3=\frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2}=1 \Rightarrow a=1$$

- Si $a=1$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to rang(A')=2=rang(A)=2=n \to \text{S.C.DETERMINADO}$$

Resolución: $\left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \to 2x=-2 \Rightarrow x=-1; -1+y=-1 \Rightarrow y=0$

- Si $a \neq 1 \to rang(A')=3 \neq rang(A)=2 \to$ S. INCOMPATIBLE

3) $\left.\begin{array}{l} mx \qquad\quad +2z=0 \\ \quad (m-2)y+z=0 \\ (m-1)x+y-z=0 \end{array}\right\}$ al ser un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial, veamos si tiene más soluciones:

$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m-1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -3m^2+7m-4=0 \rightarrow m = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \right.$$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq \frac{4}{3}$ $\rightarrow$ S. INCOMPATIBLE (sólo la solución trivial)
- Si $m=1 \rightarrow rang(A')=2=rang(A)=2=n \rightarrow$ S.C.INDETERMINADO

$$\left.\begin{matrix} x+2z=0 \\ -y+z=0 \end{matrix}\right\} y=z;\ x=-2z \rightarrow SOL: x=-2t;\ y=t;\ z=t$$

- Si $m=\frac{4}{3} \rightarrow rang(A')=2=rang(A)=2=n \rightarrow$ S.C.INDETERMINADO

$$\left.\begin{matrix} \frac{4}{3}x+2z=0 \\ -\frac{2}{3}y+z=0 \end{matrix}\right\} -\frac{2}{3}y=-z \Rightarrow y=\frac{3}{2}z \rightarrow \frac{4}{3}x=-2z \Rightarrow x=-\frac{3}{2}z \rightarrow SOL: x=-\frac{3}{2}t; y=\frac{3}{2}t; z=t$$

4) $\left.\begin{matrix} mx+y+z=2 \\ x+my \quad =1 \\ x+my+mz=1 \end{matrix}\right\}$ $A'=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 0 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = m^3-m=0 \Rightarrow m=\left\langle \begin{matrix} 0 \\ \pm 1 \end{matrix} \right.$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq \pm 1$ $\rightarrow rang(A)=3=rang(A')=n \rightarrow$ S.C. DETERMINADO

Lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{m(m^2-1)}=\frac{2m^2-m}{m(m^2-1)}=\frac{2m-1}{m^2-1};\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{m(m^2-1)}=\frac{m^2-2m}{m(m^2-1)}=\frac{m-2}{m^2-1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m(m^2-1)}=0 \rightarrow \text{ SOL}\left(\frac{2m-1}{m^2-1},\frac{m-2}{m^2-1},0\right)$$

- Si $m=1 \rightarrow rang(A)=2 \neq rang(A')=3 \rightarrow$ S. INCOMPATIBLE
- Si $m=-1 \rightarrow rang(A)=2 \neq rang(A')=3 \rightarrow$ S. INCOMPATIBLE
- Si $m=0 \rightarrow rang(A)=2=rang(A')=2 \rightarrow$ S. C. INDETERMINADO

$$\left.\begin{matrix} y+z=2 \\ x=1 \end{matrix}\right\} y=2-z \Rightarrow SOL: x=1;\ y=2-t;\ z=t$$